

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001**

Angelo Favini

**PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE PER EQUAZIONI
INTEGRO-DIFFERENZIALI DI TIPO PARABOLICO**

20 marzo 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Sunto.

Si identificano i nuclei incogniti, dipendenti solo dal tempo, in certe equazioni integro-differenziali singolari in spazi di Banach. Si danno teoremi di esistenza ed unicità sia di tipo locale nel tempo che di tipo globale. Vengono descritte alcune applicazioni ad equazioni integro-differenziali degeneri alle derivate parziali.

Summary.

We recover unknown kernels, depending on time only, in linear singular first-order integro-differential Cauchy problems in Banach spaces. Singular means here that the integro-differential equation is not in normal form neither can it be reduced to such a form. For this class of problems we prove some existence and uniqueness theorems, both of local type in time and of global type. We indicate a few applications to explicit degenerate partial integro-differential equations of parabolic type.

1 Introduzione

Sia X uno spazio di Banach (complesso), con norma $\|\cdot\|$ e siano A, B operatori lineari di X in sé, chiusi, con $-A$ generatore infinitesimale di un semigruppone analitico in X , e dominio $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$. Dati $f \in C^\theta([0, \tau]; X)$, $0 < \theta < 1$, $g \in C^2([0, \tau])$, $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\Phi \in X^*$, lo spazio duale di X , un problema di grande interesse e rilevante per le numerosissime applicazioni concrete ad equazioni alle derivate parziali é il seguente : trovare $u \in C([0, \tau]; \mathcal{D}(A))$ e $k \in C([0, \tau])$ (per esempio) tali che

$$u'(t) + Au(t) = \int_0^t k(t-s)Bu(s)ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

conoscendo l'informazione aggiuntiva

$$\Phi[u(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (1.3)$$

Si tratta, cioè di riscoprire k (e u) dalla conoscenza che u soddisfa (1.3).

Naturalmente, ci dobbiamo aspettare che i dati soddisfino condizioni di compatibilità a $t = 0$, cioè

$$\Phi[u_0] = g(0), \quad \Phi[f(0) - Au_0] = g'(0).$$

(Cf. Lorenzi [L1]).

Vari autori hanno già considerato il problema analogo a (1.1)~(1.3) per equazioni degeneri del tipo

$$Mu'(t) + Lu(t) = \int_0^t k(t-s)L_1u(s)ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1.4)$$

con l'informazione su $Mu(t)$ data da

$$\Phi[Mu(t)] = g(t) \quad \forall t \in [0, \tau]. \quad (1.5)$$

Ci limitiamo a ricordare che problemi di identificazione per certe equazioni integro-differenziali pseudo-paraboliche sono stati studiati da Asanov e Atamanov [AA], Lorenzi [L2], Lorenzi e Paparoni [LP], per esempio.

In questo seminario esporrò alcuni risultati relativi ad (1.2), (1.4), (1.5) in situazioni molto più generali di quelle analizzate precedentemente. Agli operatori M, L si richiede che soddisfino la stima risolvante

$$\|M(\lambda M + L)^{-1}\| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1} \quad (1.6)$$

per ogni λ nel settore

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq -c(1 + |\operatorname{Im} \lambda|)\}, \quad c > 0. \quad (1.7)$$

Dunque, in particolare, L ha inverso limitato.

L'ipotesi (1.6) consente di applicare al problema (1.2), (1.4) le tecniche di Favini e Yagi [FY]. Supponiamo in ogni caso $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$ e che L_1 abbia dominio $\mathcal{D}(L_1) \supseteq \mathcal{D}(L)$. Naturalmente, si assume che tutti gli operatori siano chiusi.

Inizialmente tratteremo il caso in cui $\lambda = 0$ è un polo semplice per $(\lambda + T)^{-1}$, dove

$$T = ML^{-1} \in \mathcal{L}(X); \quad (1.8)$$

Allora (1.6) è verificata per tutti i λ complessi con valore assoluto abbastanza grande. Il nostro scopo è quello di ricondurre la soluzione del problema di identificazione (1.2), (1.4), (1.5) ad una equazione non degenera. A tal fine sfrutteremo la rappresentazione in somma diretta di X :

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T), \quad (1.9)$$

dove $\mathcal{N}(T)$ è il nucleo di T e $\mathcal{R}(T)$, immagine di T , è un sottospazio chiuso di X . Si noti che \tilde{T} , restrizione di T a $\mathcal{R}(T)$, ha inverso limitato.

Per quanto riguarda il caso generale (1.6), faremo l'ipotesi supplementare che X sia riflessivo, cosicché si abbia la rappresentazione

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathcal{R}(T)}, \quad (1.10)$$

dove $\overline{\mathcal{R}(T)}$ denota la chiusura di $\mathcal{R}(T)$ nella topologia di X . Questa parte andrà trattata con molta cura, perché $-\tilde{T}^{-1}$ non è limitato, anche se genera un semigruppone analitico in $\overline{\mathcal{R}(T)}$.

2 Un problema di identificazione

Chiariamo le tecniche che sono alla base della trattazione.

Supponiamo che $(u, k) \in C^1([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$ sia una soluzione stretta di (1.2), (1.4), (1.5). Poniamo

$$v(t) = u'(t) \quad \text{se e solo se} \quad u(t) = u_0 + \int_0^t v(s) ds. \quad (2.1)$$

Allora la coppia $(v, k) \in C([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$ soddisfa il problema di identificazione

$$\frac{d}{dt}(Mv(t)) + Lv(t) = k(t)L_1u_0 + \int_0^t k(t-s)L_1v(s)ds + f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (2.2)$$

$$Mv(0) = f(0) - Lu_0, \quad (2.3)$$

$$\Phi[Mv(t)] = g'(t), \quad \forall t \in [0, \tau]. \quad (2.4)$$

Inversamente, se $(v, k) \in C([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$, con $Mv \in C^1([0, \tau]; X)$ risolve (2.2)~(2.4), in virtù della (2.1), deduciamo che $(u, k) \in C^1([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$, $Mu' \in C^1([0, \tau]; X)$, soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} Mu'(t) + Lu(t) &= \left(\int_0^t k(s) ds \right) L_1u_0 \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau k(t-s)L_1u'(s)ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Applicando il Teorema di Fubini a (2.5) vediamo che

$$\begin{aligned} Mu'(t) + Lu(t) &= \left[\int_0^t k(s) ds \right] L_1 u_0 + f(t) + \int_0^t k(s) ds \int_s^t L_1 u'(\tau - s) d\tau \\ &= \left[\int_0^t k(s) ds \right] L_1 u_0 + f(t) + \int_0^t k(s) L_1 [u(t - s) - u_0] ds \\ &= \int_0^t k(t - s) L_1 u(s) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned}$$

Così, la coppia (u, k) risolve (1.4), (1.2).

Inoltre, poiché

$$\Phi[Mv(t)] = \Phi[Mu'(t)] = \frac{d}{dt} \Phi[Mu(t)],$$

se teniamo conto della condizione di compatibilità

$$\Phi[Mu_0] = g(0), \quad \Phi[f(0) - Lu_0] = g'(0), \quad (2.6)$$

si ottiene

$$\Phi[Mu(t)] - g(t) = \Phi[Mu_0] - g(0) = 0 \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Pertanto, abbiamo visto che i problemi di identificazione (1.4), (1.2), (1.5) e (2.1)~(2.4) sono equivalenti se si cercano le soluzioni in $C^1([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$ e in $C([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$, rispettivamente.

Tale approccio è completamente soddisfacente per il caso del polo semplice. Andrà leggermente modificato per trattare la situazione generale (1.6).

3 Il caso del polo semplice

Sia $\lambda = 0$ polo semplice di $\lambda \rightarrow (\lambda I + T)^{-1} = L(\lambda L + M)^{-1}$. Denotiamo con P la proiezione di X su $\mathcal{N}(T)$ lungo $\mathcal{R}(T)$ associata alla rappresentazione (1.9).

Il cambiamento di variabile

$$w(t) = Lv(t) (\Leftrightarrow v(t) = L^{-1}w(t)) \quad (3.1)$$

trasforma il problema di identificazione (2.2)~(2.4) nel seguente: determinare una coppia $(w, k) \in C([0, \tau]; X) \times C([0, \tau])$ tale che $Tw \in C^1([0, \tau]; X)$ e valgano

$$\frac{d}{dt}(Tw(t)) + w(t) = k(t)L_1 u_0 + \int_0^t k(t-s)L_1 L^{-1}w(s)ds + f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (3.2)$$

$$Tw(0) = f(0) - Lu_0, \quad (3.3)$$

$$\Phi[Tw(t)] = g'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (3.4)$$

Risolviamo dunque (3.2)~(3.4). A tal fine, faremo le seguenti ipotesi :

$$\mathcal{N}(T) \text{ é invariante sotto } L_1 L^{-1}, \quad (3.5)$$

$$f(0) - Lu_0 \in \mathcal{R}(T), \quad (3.6)$$

$$\Phi[(1 - P)L_1 u_0] \neq 0. \quad (3.7)$$

Osservazione 1. Se $L_1 = aL$, con $a \neq 0$, la (3.5) é banalmente soddisfatta.

Il primo nostro risultato, ottenuto nel lavoro in collaborazione con Alfredo Lorenzi [FL], é il seguente.

Teorema 3.1. Sia $z = 0$ un polo semplice per $L(zL + M)^{-1}$, con L, L_1, M operatori lineari chiusi in X tali che $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(L_1) \cap \mathcal{D}(M)$, $0 \in \rho(L)$. Sia inoltre

$$\Phi \in X^*, \quad f \in C^1([0, \tau]; X), \quad g \in C^2([0, \tau]), \quad u_0 \in \mathcal{D}(L), \quad (3.8)$$

e valgano (3.5)~(3.7) insieme alle condizioni di consistenza (2.6).

Allora il problema (1.2), (1.4), (1.5) ha una unica soluzione $(u, k) \in C^1([0, \tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0, \tau])$ tale che $Mu' \in C^1([0, \tau]; X)$.

Dimostrazione. Tenendo conto della assunzione (3.5), il sistema (3.2)~(3.4) diventa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\tilde{T}(1 - P)w(t)) + (1 - P)w(t) = k(t)(1 - P)L_1 u_0 \\ & + \int_0^t k(t - s)(1 - P)L_1 L^{-1}(1 - P)w(s)ds + (1 - P)f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\tilde{T}(1 - P)w(0) = f(0) - Lu_0, \quad (= (1 - P)[f(0) - Lu_0] \text{ per (3.6)}), \quad (3.10)$$

$$\Phi[\tilde{T}(1 - P)w(t)] = g'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (3.11)$$

$$Pw(t) = k(t)PL_1 u_0 + \int_0^t k(t - s)PL_1 L^{-1}w(s)ds + Pf'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (3.12)$$

Osserviamo che il problema di identificazione (3.9)~(3.11) contiene solo le incognite $((1 - P)w, k)$. Introducendo la nuova incognita

$$z(t) = \tilde{T}(1 - P)w(t) \quad (\Leftrightarrow (1 - P)w(t) = \tilde{T}^{-1}z(t)),$$

il problema (3.9)~(3.11) diventa

$$\begin{aligned} z'(t) + \tilde{T}^{-1}z(t) &= k(t)(1 - P)L_1 u_0 + \int_0^t k(t - s)(1 - P)L_1 L^{-1}\tilde{T}^{-1}z(s)ds \\ &+ (1 - P)f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$z(0) = f(0) - Lu_0, \quad (3.14)$$

$$\Phi[z(t)] = g'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (3.15)$$

Si noti che \tilde{T}^{-1} è un operatore limitato da $\mathcal{R}(\tilde{T}) = \mathcal{R}(T)$ in sé.

Consideriamo allora il seguente problema inverso nello spazio di Banach $\mathcal{R}(T)$, che denoteremo Y , per brevità:

$$\begin{aligned} y'(t) + \tilde{T}^{-1}y(t) &= \int_0^t k(t-s)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}y(s)ds \\ &+ (1-P)f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$y(0) = Mu_0 = TLu_0 = \tilde{T}(1-P)Lu_0, \quad (3.17)$$

$$\Phi[y(t)] = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (3.18)$$

Allora $z = y'$ soddisfa

$$\begin{aligned} z'(t) + \tilde{T}^{-1}z(t) &= k(t)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}y(0) \\ &+ \int_0^t k(t-s)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}z(s)ds + (1-P)f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned}$$

In forza di (3.5) si ha $(1-P)L_1L^{-1}PLu_0 = 0$, cosicché

$$\begin{aligned} k(t)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}y(0) &= k(t)(1-P)L_1L^{-1}(1-P)Lu_0 \\ &= k(t)(1-P)L_1L^{-1}[(1-P)Lu_0 + PLu_0] = k(t)(1-P)L_1Lu_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pertanto, $z(\cdot)$ soddisfa (3.13) e, in forza della (3.6),

$$\begin{aligned} z(0) &= (1-P)f(0) - \tilde{T}^{-1}y(0) = (1-P)[f(0) - Lu_0] \\ &= f(0) - Lu_0. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\Phi[z(t)] = \Phi[y'(t)] = \frac{d}{dt}\Phi[y(t)] = g'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Ma allora $z(\cdot)$ è proprio l'unica soluzione di (3.13)~(3.15). Possiamo dunque applicare al problema (3.13)~(3.15) i risultati di Lorenzi e Paparoni [LP, Sezione 2]. Pertanto, tale problema ammette una unica soluzione $(z, k) \in W^{1,p}((0, \tau); \mathcal{R}(T)) \times L^p((0, \tau))$ per ogni $p \in (1, +\infty)$.

D'altra parte, se denotiamo con χ il numero

$$\chi = (\Phi[(1-P)L_1u_0])^{-1}, \quad (3.20)$$

dalle assunzioni (3.5)~(3.7) e dall'equazione (3.15) si trova che (cf. Lorenzi e Paparoni [LP])

$$\begin{aligned} k(t) &= \chi\{g''(t) - \Phi[(1-P)f'(t)]\} + \chi\Phi[\tilde{T}^{-1}z(t)] \\ &- \chi \int_0^t k(s)\Phi[(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}z(t-s)]ds, \quad 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e quindi k è continua su $[0, \tau]$. Pertanto la soluzione $z(\cdot)$ del problema di Cauchy (3.13), (3.14) appartiene a $C^1([0, \tau]; \mathcal{R}(T))$. Segue che $(1 - P)w(t) = \tilde{T}^{-1}z(t)$ è il primo elemento della coppia $C([0, \tau]; \mathcal{R}(T)) \times C([0, \tau])$ che soddisfa (3.9)~(3.11).

Resta ora da trovare una unica funzione Pw dalla (3.12). Poiché il nucleo $k(\cdot)$ ed il membro a destra

$$h(t) = \int_0^t k(t-s)PL_1L^{-1}(1-P)w(s)ds + k(t)PL_1u_0 + Pf'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (3.22)$$

sono ora conosciuti, la (3.12) può essere scritta nella forma integrale

$$Pw(t) - \int_0^t k(t-s)PL_1L^{-1}Pw(s)ds = h(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (3.23)$$

L'operatore integrale

$$(Kw)(t) = \int_0^t k(t-s)PL_1L^{-1}Pw(s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (3.24)$$

è limitato da $C([0, \tau]; \mathcal{N}(T))$ in sé e ha raggio spettrale uguale a zero. Così l'equazione integrale (3.23) ammette una unica soluzione $Pw \in C([0, \tau]; \mathcal{N}(T))$. #

Osservazione 3.2. Se $L^{-1}L_1$ ha una estensione limitata $\overline{L^{-1}L_1}$ che commuta con M , allora l'assunzione (3.5) è soddisfatta; infatti, se $u \in \mathcal{N}(T)$, cioè $ML^{-1}u = 0$, allora

$$ML^{-1}L_1L^{-1}u = M\overline{L^{-1}L_1}L^{-1}u = \overline{L^{-1}L_1}ML^{-1}u = 0.$$

Analogamente, se $T = ML^{-1}$ e L_1L^{-1} commutano, di nuovo la (3.5) è soddisfatta. Se, poi, M stesso commuta con L e L_1 , tenendo conto che $X = \mathcal{N}(M) \oplus \mathcal{R}(M)$, si vede facilmente che i nostri argomenti possono essere nuovamente adattati.

4 Il caso parabolico

Studieremo la risolubilità locale del problema di identificazione (1.2), (1.4), (1.5) sotto la condizione (1.6), X essendo uno spazio di Banach riflessivo.

Per brevità, porremo $\overline{\mathcal{R}(T)}$ (con la topologia indotta da quella di X) = Y . Indicheremo ancora con P l'operatore di proiezione su $\mathcal{N}(T)$ lungo Y .

Prima di tutto osserviamo che l'operatore $(1 - P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}$ è densamente definito in Y ma può non essere chiuso. Questa è una ipotesi aggiuntiva che dobbiamo fare, cioè

$$(1 - P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1} \text{ è un operatore chiuso da } Y \text{ in sé.} \quad (4.1)$$

Abbiamo già ricordato che, in virtù di (1.6), $-\tilde{T}^{-1}$ genera un semigruppato analitico su Y . Adottando le notazioni della Sezione 3, sappiamo, cf. Lorenzi e Sinestrari [LS], Theorem 4.1, che il problema (3.16)~(3.18) ha una unica soluzione stretta locale (y, k) , nel senso che (3.16) e (3.18) valgono su un opportuno intervallo $[0, \tau_1] \subseteq [0, \tau]$,

$$y \in C^1([0, \tau_1]; \mathcal{D}(\tilde{T}^{-1})) \cap C^2([0, \tau_1]; Y), \quad (4.2)$$

$$t^{1-\alpha}k \in C^\beta([0, \tau_1]), \quad (4.3)$$

dove

$$\alpha, \beta \in (0, 1), \quad \beta \leq \min(\alpha, 1 - \alpha) \quad (4.4)$$

sono fissati, purché

$$(1 - P)f \in C^{1+\beta}([0, \tau_1]; Y), \quad (4.5)$$

$$\tilde{T}(1 - P)Lu_0, \quad (1 - P)L_1L^{-1}(1 - P)Lu_0, \quad (1 - P)[f(0) - Lu_0] \in \mathcal{R}(T), \quad (4.6)$$

$$(1 - P)f'(0) - \tilde{T}^{-1}\{(1 - P)[f(0) - Lu_0]\} \in \mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty), \quad (4.7)$$

$$g \in C^1([0, \tau]) \cap C^2((0, \tau]), \quad t^{1-\alpha}g'' \in C^\beta([0, \tau]), \quad (4.8)$$

$$g(0) = \Phi[Mu_0], \quad g'(0) = \Phi[(1 - P)(f(0) - Lu_0)], \quad (4.9)$$

$$\Phi[(1 - P)L_1L^{-1}(1 - P)Lu_0] \neq 0. \quad (4.10)$$

Ora, sotto l'assunzione (3.5), la (4.10) si riduce alla (3.7). Pertanto, se

$$L_1u_0 \in \mathcal{R}(T), \quad (4.11)$$

la (4.10) diventa $\Phi[L_1u_0] \neq 0$. Poiché (3.5) implica che

$$(1 - P)L_1L^{-1}(1 - P)Lu_0 = (1 - P)L_1L^{-1}Lu_0 = (1 - P)L_1u_0,$$

che appartiene a $\mathcal{R}(T)$, per la (4.11), anche la seconda appartenenza nella (4.6) è soddisfatta.

Se vale la (3.6), cioè

$$f(0) - Lu_0 = M\bar{y}, \quad \bar{y} \in \mathcal{D}(L), \quad (4.12)$$

anche la terza assunzione in (4.6) è verificata. Poiché

$$f(0) - Lu_0 = TL\bar{y} = \tilde{T}(1 - P)L\bar{y},$$

la (4.7) diventa

$$(1 - P)[f'(0) - L\bar{y}] \in \mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty), \quad (4.13)$$

che è ovviamente soddisfatta se

$$f'(0) - L\bar{y} \in \mathcal{R}(T). \quad (4.14)$$

Ricordiamo che $\mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty)$ è lo spazio di interpolazione reale

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty) &= (X, \mathcal{D}(-\tilde{T}^{-1}))_{\beta, \infty} \\ &= (Y, \mathcal{R}(T))_{\beta, \infty}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Inoltre, sotto la (4.12), (4.9) si riduce alla (2.6).

Pertanto, sotto le assunzioni (1.6), (2.6), (3.5), (4.1), (4.4), (4.8), (4.12), (4.14) (o, più generalmente, (4.13)) e $f \in C^{1+\beta}([0, \tau]; X)$ il problema (3.16)~(3.18) ha una unica soluzione locale (y, k) su $[0, \tau_1]$ e

$$y \in C^1([0, \tau_1]; \mathcal{D}(\tilde{T}^{-1})) \cap C^2((0, \tau_1]; Y), \quad t^{1-\alpha}k \in C^\beta([0, \tau_1]).$$

Si noti che (3.16)~(3.18) è non lineare. Inoltre, $z = y' \in C([0, \tau_1]; \mathcal{D}(\tilde{T}^{-1})) \cap C^1((0, \tau_1]; Y)$ soddisfa la (3.13) su $(0, \tau_1]$, insieme alle (3.14), (3.15).

Chiaramente, la proprietà di $k(\cdot)$ è connessa col Teorema di esistenza di Pazy [P], Theorem 3.2, p. 111.

Segue che $\tilde{T}^{-1}z = (1 - P)w \in C([0, \tau_1]; Y)$, $\tilde{T}(1 - P)w \in C^1((0, \tau_1]; Y)$ risolve il sistema (3.9)~(3.11) su $(0, \tau_1]$.

D'altro canto, poiché $PL_1u_0 = 0$ in forza della (4.10), la proprietà $t^{1-\alpha}k(\cdot) \in C^\beta([0, \tau_1])$ implica che l'operatore integrale K introdotto nella (3.24) è limitato da $C([0, \tau_1]; \mathcal{N}(T))$ in sé ed è contrattivo se τ_1 è sufficientemente piccolo. Così la (3.12) ha una unica soluzione locale Pw . Abbiamo così provato la seguente affermazione.

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e siano L, L_1, M operatori lineari chiusi in X tali che $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(L_1) \cap \mathcal{D}(M)$, $0 \in \rho(L)$ e valgano (1.6), (3.5), (4.1). Siano $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\beta \leq \min(\alpha, 1 - \alpha)$, $f \in C^{1+\beta}([0, \tau]; X)$, $g \in C^1([0, \tau]) \cap C^2((0, \tau])$, $t^{1-\alpha}g'' \in C^\beta([0, \tau])$, $u_0 \in \mathcal{D}(L)$.*

Siano infine soddisfatte (2.6), (4.11), (4.12), (4.14), con $\Phi[L_1u_0] \neq 0$, dove Φ è un assegnato elemento di X^ .*

Allora il problema di identificazione (1.2), (1.4), (1.5) ha una unica soluzione su $[0, \tau_1]$, con $0 < \tau_1 \leq \tau$ opportuno, e $u \in C^1((0, \tau_1]; \mathcal{D}(L))$, $Mu' \in C^1((0, \tau_1]; X)$, $t^{1-\alpha}k \in C^\beta([0, \tau_1])$.

Risultati analoghi sono stati ottenuti negli spazi di funzioni $W^{\theta,p}([0, \tau]; X)$, $1/p < \theta < 1$, $p > 1$. (cf. [FL])

Si è anche ottenuto un teorema di esistenza globale nel caso di $L_1 = L$ attraverso una analisi dettagliata e raffinata degli operatori non lineari connessi alla soluzione di (1.2), (1.4), (1.5), introducendo opportuni spazi pesati di funzioni hölderiane ed L^p .

5 Applicazioni

Applicazione 1. Sia K un operatore lineare chiuso nello spazio di Banach (complesso) X con inverso limitato, con $-\lambda_1$ autovalore semplice di K , cioè, esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\|((\lambda + \lambda_1)I + K)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1}, \quad 0 < |\lambda| \leq \epsilon.$$

Posti

$$M = \lambda_1 I + K, \quad L = -K, \quad L_1 = \gamma K, \quad \gamma \in R,$$

tutte le assunzioni del Teorema 3.1 sono soddisfatte.

Per esempio, sia Ω un dominio limitato di R^n , $n \geq 1$, con frontiera regolare e si prenda $X = C(\bar{\Omega})$ con la norma del massimo. Definiamo K e Φ mediante

$$\mathcal{D}(K) = \{u \in \bigcap_{p \geq n} W^{2,p}(\Omega) : \Delta u \in C(\bar{\Omega}), u = 0 \text{ in } \partial\Omega\},$$

$$Ku = \Delta u,$$

$$\Phi[u] = \int_{\Omega} \psi(x)u(x)dx,$$

dove $\psi \in L^1(\Omega)$.

Se $-\lambda_1 < 0$ denota il primo autovalore di Δ , il Teorema 3.1 permette di trattare il problema di identificazione

$$(\lambda_1 I + \Delta) \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \gamma \int_0^t k(t-s) \Delta u(x, s) ds + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \tau],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau],$$

$$\int_{\Omega} \psi(x)(\lambda_1 I + \Delta)u(x, t)dx = g(t), \quad t \in [0, \tau],$$

dove $f \in C^1([0, \tau]; C(\bar{\Omega}))$, $g \in C^2([0, \tau])$, $u_0 \in \mathcal{D}(K)$ soddisfano le condizioni stabilite nel teorema sopra richiamato.

Applicazione 2. Sia λ_0 un autovalore del laplaciano con condizioni ai limiti di tipo Dirichlet ; prendiamo

$$K = \Delta, \quad \mathcal{D}(K) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad M = \lambda_0 I - K,$$

$$L = a\Delta - b\Delta^2, \quad \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(K^2), \quad L_1 = \Delta^2,$$

$$\Phi[h] = \int_{\Omega} \psi(x)h(x)dx, \quad h \in L^2(\Omega)$$

dove ψ é un fissato elemento di $L^2(\Omega)$. Cosí $\Phi \in X^*$, $X = L^2(\Omega)$.

Applicando i risultati di Favini e Yagi [FY], si vede che tutte le ipotesi sugli operatori del Teorema 4.1 sono soddisfatte, cosicché possiamo trattare equazioni di tipo Sobolev, con $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$, $\mathcal{D}(L) \neq \mathcal{D}(M)$. Per le motivazioni, vedi Sviridyuk e Efremov [SE].

Applicazione 3. Sia $X = H^{-1}(\Omega)$, Ω un dominio limitato di R^n con frontiera regolare. Definiamo L , L_1 e M mediante

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L_1) = H_0^1(\Omega), \quad Lu = L_1u = -\Delta u, \quad Mu = mu, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

dove m é una funzione in $C(\bar{\Omega}) \geq 0$.

Si vede (cf. Favini e Yagi [FY]) che la proprietà (1.6) è soddisfatta. Possiamo allora applicare il Teorema 4.1 al seguente problema di identificazione :

$$m(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = - \int_0^t k(t-s) \Delta u(x, s) ds + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \tau],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \tau],$$

$$\int_{\Omega} \psi(x) m(x) u(x, t) dx = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

dove l'ultimo integrale denota la dualità fra $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Qui ψ è un fissato elemento di $H_0^1(\Omega)$.

Applicazione 4. Sia Ω un dominio limitato di R^n con frontiera regolare. Siano L , L_1 , M gli operatori definiti da

$$\mathcal{D}(L) = H_0^2(\Omega), \quad L_1 u = Lu = \sum_{|\alpha|, |\beta|=2} D^\alpha [a_{\alpha, \beta} D^\beta u] - \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u,$$

$$\mathcal{D}(M) = H_0^1(\Omega), \quad Mu = - \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (m_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + m_0 u,$$

dove i coefficienti $a_{\alpha\beta}$, a_{ij} , m_{ij} , a_0 , m_0 soddisfano

$$a_{\alpha\beta}, a_{ij}, a_0, m_{ij}, m_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad i, j = 1 \dots n, \quad |\alpha|, |\beta| = 2,$$

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad m_{ij} = m_{ji}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad |\alpha|, |\beta| = 2,$$

$$\sum_{i, j=1}^n m_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall \xi \in R^n,$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) \eta_\alpha \eta_\beta \geq c_0 \sum_{|\alpha|=2} \eta_\alpha^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall \eta_\alpha \in R,$$

$$a_0(x) \geq 0, \quad m_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

dove c_0 è una costante positiva.

Osserviamo che $H_0^2(\Omega)$ con la usuale norma di Sobolev è equivalentemente normato da

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|, |\beta|=2} a_{\alpha, \beta} D^\alpha u D^\beta \bar{u} + \sum_{i, j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + a_0 |u|^2 \right] dx \right\}^{1/2}.$$

Inoltre,

$$(Mu, u)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j}^n m_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + m_0 |u|^2 \right] dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Introducendo le forme sesquilineari

$$l(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|, |\beta|=2} a_{\alpha\beta} D^{\alpha} u D^{\beta} \bar{v} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + a_0 u \bar{v} \right] dx, \quad u, v \in H_0^2(\Omega),$$

$$m(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n m_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + m_0 u \bar{v} \right] dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

$$a_{\lambda}(u, v) = \lambda m(u, v) + l(u, v), \quad u, v \in H_0^2(\Omega), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

e ragionando come in Favini e Yagi [FY], si vede che $\lambda M + L$ è limitato da $H_0^2(\Omega)$ a $H^{-2}(\Omega)$ e per ogni λ con $\Re \lambda \geq 0$ si ha che esiste $(\lambda M + L)^{-1}$, con

$$(1 + |\lambda|) \|M(\lambda M + L)^{-1} f\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{-2}(\Omega)},$$

per cui la (1.6) è soddisfatta con $X = H^{-2}(\Omega)$.

Si può quindi applicare il Teorema 4.1, per esempio, al funzionale Φ del tipo

$$\Phi[u] = \langle u, \psi \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [AA] A. Asanov, E. R. Atamanov: *Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations, Inverse and Ill Posed Problems Series*, VSP (1997).
- [FL] A. Favini, A. Lorenzi: *Identification problems for singular integro-differential equations of parabolic type II*, preprint.
- [FY] A. Favini and A. Yagi: *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Dekker, New York-Basel-Hong Kong (1999).
- [L1] A. Lorenzi: *Un'introduzione ai problemi di identificazione*, Quaderno MA.C.R.O. no. 4/1997, Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università di Milano.
- [L2] A. Lorenzi: *Pseudoparabolic integro-differential identification problems at resonance in Hilbert spaces*, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 6 (1998), 485–513.
- [LP] A. Lorenzi and E. Paparoni: *Identification problems for pseudoparabolic integro-differential operator equations*, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 5 (1997), 235–253.
- [LS] A. Lorenzi, E. Sinestrari : *An inverse problem in theory of materials with memory*, *Nonlin. Anal., Theory, Methods & Appl.* 12(1988), 1317–1335.
- [P] A. Pazy : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1983.
- [SE] G.A. Sviridyuk, A.A. Efremov : *Optimal control of Sobolev-type linear equations with relatively p -sectorial operators*, *Diff. Uravn.* 31 (1995), 1912–1919 (in russo) ; trad. ingl. *Diff. Eqs.* 31 (1995), 1882–1890.